Il 16 dicembre 2015 ero a Napoli. Ad un angolo di Piazza Dante mi sono imbattuto nel "matematico di strada", come egli si definisce, Giuseppe Polone immerso nel suo armamentario di tabelle di numeri. Il geniale personaggio ha costruito in pochi secondi, davanti ai miei occhi, il seguente quadrato magico 4x4 basato sulla mia data di nascita 19/12/1947

Come si può notare la somma dei numeri sulle righe, le colonne, le diagonali e altre zone del quadrato dà sempre 1947! Se si ordinano i numeri si ottengono le seguenti due sequenze

19 31 43 55 67 79 91 103

870,5 882,5 894,5 906,5 918,5 930,5 942,5 954,5

le quali sono due distinte progressioni aritmetiche di ragione 12 e il numero più piccolo è il 19: un vero capolavoro.

Nonostante che io possieda una discreta letteratura sui quadrati magici non ho mai visto nulla del genere, non assomiglia a nessun quadrato magico standard. Purtroppo non ho avuto il tempo di discuterne con l'autore il quale sembra non avere neanche un indirizzo email attraverso cui contattarlo. Mi è parso di capire che egli viva andando in giro, anche all'estero, proponendo spettacoli e sfide sulla costruzione di quadrati magici. Un personaggio davvero singolare che meriterebbe un riconoscimento pubblico per questa sua abilità, magari da parte del mondo accademico dei matematici. Per capire quanto originale sia il tipo di quadrato magico costruito da Giuseppe Polone riassumiamo di seguito le proprietà dei quadrati magici standard.

I quadrati magici standard sono costituiti da soli numeri interi tali che, dato un quadrato con lato di n caselle e quindi di n^2 caselle totali, esso contiene i primi n^2 numeri interi.

Poiché la somma dei primi n numeri interi è

$$1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

ovviamente la somma dei primi n^2 numeri interi sarà

$$1+2+3+...+n^2=\frac{n^2(n^2+1)}{2}$$

Siccome la proprietà fondamentale del quadrato magico è quella che la somma dei numeri sulle singole righe, colonne, diagonali, e a volte anche su altre parti del quadrato, è una costante, per i quadrati magici di cui stiamo trattando questa costante magica deve essere

$$\frac{1+2+3+...+n^2}{n}=\frac{n^2(n^2+1)}{2n}=\frac{n\left(n^2+1\right)}{2}$$

Ad esempio per un quadrato $n=4$ la costante magica è 34 e il quadrato è

4	5	16	9
14	11	2	7
1	8	13	12
15	10	3	6

La somma 34 non è limitata alle sole righe, colonne e diagonali ma anche a zone diverse che ho contrassegnate con lo stesso colore, e ce ne sono anche altre. Conoscere la sequenza dei numeri nulla ci dice di come disporli nelle caselle per ottenere la costante magica calcolata.

Che io sappia non esiste un algoritmo generale per eseguire tale disposizione ma esistono diversi algoritmi per tipologie.

Dal quadrato surriportato scambiando opportunamente i numeri tra le caselle si possono ottenere 880 configurazioni diverse, senza contare le simmetrie di rotazione e riflessione.

Dai quadrati magici standard si possono derivare immediatamente altri quadrati sommando ai numeri delle singole caselle uno stesso numero. Ovviamente ciò cambia la costante magica. Per certe categorie di quadrati anche altre operazioni come moltiplicazione ed elevamento a potenza generano altri quadrati magici.

Su http://mathworld.wolfram.com/MagicSquare.html ho trovato una formula che fornisce la sequenza dei numeri per costruire un quadrato magico di ordine qualsiasi n partendo da un numero qualsiasi a e seguendo una progressione aritmetica di ragione D

$$M(n,a,D)=\frac{1}{2}n\left[2a+D\left(n^2-1\right)\right]$$

(Hunter and Madachy,1975)

In cui $M(n,a,D)$=Costante magica; n=ordine del quadrato (numero caselle per lato); a= numero di partenza; D= ragione della progressione aritmetica.

Se volessimo applicare questa formula per $M(n,a,D)$=1947 ed n=4 ci troveremmo a dover risolvere la seguente equazione indeterminata con le incognite a e D.

$$1947=4a+30D$$

Se vogliamo soluzioni intere si vede subito che sono impossibili in quanto 1947 è dispari mentre il membro di destra dà risultato sempre pari. Perciò per 1947, con la formula di cui sopra, non si può costruire una sequenza di numeri interi per un quadrato magico (naturalmente si può costruire una sequenza non intera).

Se invece si vuole

$$1946=4a+30D$$

utilizzando il calcolatore online
https://www.math.uwaterloo.ca/~snburris/htdocs/linear.html
con qualche calcolo si ottiene $a=14$ e $D=63$ e quindi si può costruire un quadrato magico con numeri interi basato sulla formula surriportata. Naturalmente la formula ci fornisce solo la sequenza dei numeri da utilizzare ma nulla ci dice di come posizionarli nelle caselle del quadrato. Qui intervengono gli algoritmi di posizionamento dei quali però non trattiamo.

Sul sito http://www.markfarrar.co.uk/msq4x401.htm c'è un calcolatore che aiuta a calcolare quadrati magici, però non fornisce un aiuto per posizionare i numeri da noi calcolati in precedenza con la formula di cui sopra. Infatti per la costante magica 1946 fornisce

487	484	481	494
482	493	488	483
492	479	486	489

485	490	491	480

mentre per 1947 dà

487	484	481	495
482	494	488	483
493	479	486	489
485	490	492	480

C'è un altro sito che calcola quadrati magici in un modo un po' strano e apparentemente difficile da controllare http://www.grogono.com/magic/makeyourown4.php. Comunque con qualche tentativo questo sito fornisce il seguente quadrato magico per la costante magica 1946

830	221	549	346
283	612	564	487
424	627	143	752
409	486	690	361

mentre per 1947 fornisce

830	221	549	347
283	613	564	487
425	627	143	752
409	486	691	361

Questo è quanto sono riuscito finora ad appurare consultando tutta la letteratura in mio possesso.

Il matematico di strada Giuseppe Polone evidentemente ne sa un bel po' di più! Per uno che ha solo la quinta elementare, come egli afferma, è davvero un risultato eccezionale.

<u>Nota</u>

La somma dei primi n numeri interi, che è $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$, ha una facile ed interessante dimostrazione.

Per n **pari** possiamo disporre i numeri nel seguente modo su $\frac{n}{2}$ colonne e 2 righe: ovvero si divide l'insieme dei numeri in due parti uguali e si ripiega la seconda sotto la prima come qui di seguito

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & ... & \frac{n}{2} \\ n & (n-1) & (n-2) & ... & \left(\frac{n}{2}+1\right) \end{array}$$

In tal modo la somma sulle colonne è sempre $n+1$ e ci sono $\frac{n}{2}$ colonne, da cui la formula della somma.

Per n **dispari**, aggiungendo alla sequenza il numero 0 in modo da ottenere un numero pari di elementi, possiamo ancora disporre i numeri nel seguente modo

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & ... & \left(\frac{n-1}{2}\right) \\ n & n-1 & n-2 & ... & \left(\frac{n-1}{2}+1\right) \end{array}$$

in cui stavolta la somma sulle colonne è n e ci sono $\left(\frac{n-1}{2}+1=\frac{n+1}{2}\right)$ colonne, da cui si deduce sempre la stessa formula della somma. È solo un modo diverso di considerare la stessa somma.

Ad esempio sommiamo i primi 101 numeri naturali. Aggiungendo lo 0 abbiamo un numero pari di 102 elementi. Separando la sequenza in due parti uguali di 51 elementi ciascuna, secondo lo schema di cui sopra, avremo 51 colonne a somma 101 e quindi $51x101=5151$, come anche da formula.